Θέμα Α

Α1) Απόδειξη σχολ. Βιβλίου σελ 150-151.

Α2) Ορισμος σχολ. Βιβλίου σελ 87.

Α3) Ορισμός σχολ. Βιβλίου σελ. 14.

Α4). α) Σ β) Λ γ) Σ

δ) Σ ε) Λ.

Θέμα Β

$f(x) = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x - 1$ το $x \in R$

η f συνεχής ως πολυωνυμική

Β1) $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1\right)' = x^2 - 5x + 6.$

Θέτω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = $ 3, 2.

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		Τ.μ		Τ.Ε	

η f στο $x=2$ παρουσιάζει τοπικό μεγιστο με τιμή $f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1 =$

$= \frac{8}{3} - 10 + 12 - 1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{8+3}{3} = \frac{11}{3}.$

η f στο $x=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 1 = 9 - \frac{45}{2} + 18 - 1 = 26 - \frac{45}{2} = \frac{7}{2}$

B2) Η εξίσωση της εφ/νης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0) = \frac{0^3}{3} - \frac{5}{2}\cdot 0^2 + 6\cdot 0 - 1 = -1$$

$$f'(0) = 0^2 - 5\cdot 0 + 6 = 6$$

Άρα $(\varepsilon): y - (-1) = 6\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = 6x - 1$.

B3) $$\lim_{x\to -1} \frac{f'(x) - 12}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-6)}{\cancel{x+1}} = -7.$$

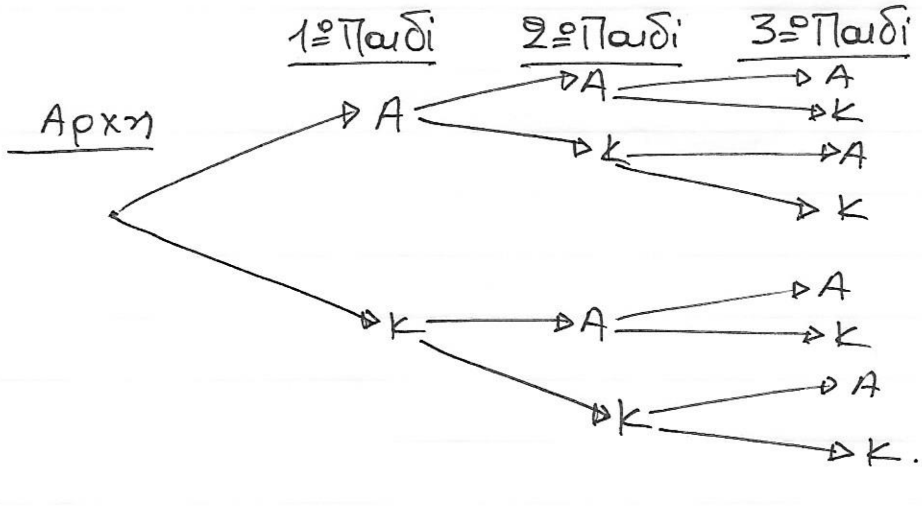
$$x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$$

1	−5	−6	−1
↓	−1	6	
1	−6	0	

Θέμα Γ

Δεντροδιάγραμμα

Γ1)



Ω
AAA
AAK
AKA
AKK
KAA
KAK
KKA
KKK.

Άρα ο δειγματικός Χώρος του π.τ. είναι:

$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

Γ2) A: «το 1ο παιδί είναι κορίτσι», $A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$

B: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών».

$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$

Γ: «τα 2 πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου

$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$

Γ3) $N(\Omega) = 8$, $N(A) = 4$, $N(B) = 4$, $N(\Gamma) = 4$.

$\Delta = A \cap B = \{KAK, KKA, KKK\}$ $N(\Delta) = 3$

Άρα $P(\Delta) = \dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{8}.$

$E = A \cup B = \{ KAK, KKA, KKK, KAA, AKK \}$, $N(E) = 5$.

Άρα $P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$

$Z = \Gamma - E = \{ AAA, AAK \}$, $N(Z) = 2$

Άρα $P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

(β) Η : «Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α, Β» $= (A \cup B)'$

$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = \overset{8}{1} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

Θ : «πραγματοποιείται ακριβώς 1 από τα Α, Β» =
$= (A - B) \cup (B - A)$ όμως $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$
ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος

Άρα $P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) =$
$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 2\frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$.

Θέμα Δ

Δ1) 1η κλάση: $[8, 8+c)$
2η κλάση $[8+c, 8+2c)$

όμως $x_2 = 14 \Leftrightarrow \dfrac{8+c+8+2c}{2} = 14 \Leftrightarrow 16+3c = 28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4.$

Κλάσεις	x_i	ν_i
[8, 12)	10	20
[12, 16)	14	15
[16, 20)	18	10
[20, 24)	22	ν_4
Σύνολο	//	$45+\nu_4$

Δ2) $\bar{x} = \dfrac{x_1 \cdot \nu_1 + x_2 \cdot \nu_2 + x_3 \cdot \nu_3 + x_4 \cdot \nu_4}{\nu} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14 = \dfrac{10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22 \cdot \nu_4}{45 + \nu_4}$

$\Leftrightarrow 630 + 14\nu_4 = 200 + 210 + 180 + 22\nu_4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 630 - 590 = 8\nu_4 \Leftrightarrow 40 = 8\nu_4 \Leftrightarrow \nu_4 = 5.$

Κλάσεις	x_i	ν_i
[8, 12)	10	20
[12, 16)	14	15
[16, 20)	18	10
[20, 24)	22	5
Σύνολο	///	$\nu = 50$

Δ3) Παρατηρήσεις ομοιόμορφα κατανεμημένες άρα από 9 έως 12min χρειάστηκαν: ν_1' υπολογιστές, όπου:

$\dfrac{c}{c'} = \dfrac{\nu_1}{\nu_1'} \Leftrightarrow \dfrac{4}{12-9} = \dfrac{20}{\nu_1'} \Leftrightarrow 4\nu_1' = 60 \Leftrightarrow \nu_1' = 15.$

Άρα τουλάχιστον 9min χρειάστηκαν:

$\nu_1' + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 15 + 15 + 10 + 5 = 45$ υπολογιστές.

Δ4) Διασπορά $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} \nu_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$, $\bar{x} = 14$.

x_i	ν_i	$(x_i-\bar{x})^2$	$\nu_i \cdot (x_i-\bar{x})^2$
10	20	16	320
14	15	0	0
18	10	16	160
22	5	64	320
Σύνολο	ν=50	////	800

$= \frac{1}{5\cancel{0}} \cdot 80\cancel{0} = 16$

άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$.

$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = 0{,}286$

$CV > 0{,}1$ δεν είναι ομοιογενές.

Δ5) Έστω y_i οι νέες τιμές των χρόνων των ν-υπαλλήλων

Αυτές προκύπτουν ως εξής: $y_i = x_i - \frac{80}{100} x_i = x_i - 0{,}8 x_i \Rightarrow$
$\Leftrightarrow y_i = 0{,}2 \cdot x_i$
Τότε ~~[illegible]~~ λόγω εφαρμογής σχολ. βιβλίου:

$\bar{y} = 0{,}8 \cdot \bar{x}$
$s_y = |0{,}8| s = 0{,}8 \cdot s$.

Άρα $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{\cancel{0{,}8}\bar{x}}{\cancel{0{,}8} \cdot s} =$
$= \frac{\bar{x}}{s} = CV_x$ δεν είναι ομοιογενές.

Καλά Αποτελέσματα
Φρ. Επιλογή
Κατσέτας Χάρης
Μαθηματικός.